МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико – математический факультет
Кафедра вычислительной математики

И. О. Арушанян

Избранные задачи для семинарских занятий по численным методам: векторные и матричные нормы

Учебное пособие

Москва, 2019

Данное учебное пособие содержит методические материалы для проведения семинарских занятий на четвертом курсе механико-математического факультета МГУ по учебной дисциплине “Численные методы”, в которых рассматриваются векторные и матричные нормы.

Предварительные замечания

Векторные нормы. Пусть вещественному или комплексному n-вектору $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ (T — операция транспонирования) поставлено в соответствие вещественное число $\|\boldsymbol{x}\|$, такое, что выполнены следующие аксиомы:

$$\|\boldsymbol{x}\| > 0\,, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{x} \neq 0\,, \quad \|\boldsymbol{0}\| = 0,$$

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\| \quad \text{(аксиома абсолютной однородности)}$$

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \quad \text{(аксиома (неравенство) треугольника)}$$

для любого числа α и любого n-вектора $\|\boldsymbol{y}\|$. Тогда число $\|\boldsymbol{x}\|$ называется *нормой* вектора $\|\boldsymbol{x}\|$.

Наиболее употребительными на практике являются следующие векторные нормы:

— абсолютная норма (норма l_1, или 1-норма)

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;$$

— евклидова норма (норма l_2, или 2-норма)

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})| = \left|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\right| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2},$$

где через (,) обозначено скалярное произведение векторов;

— максимальная норма (норма l_∞, или ∞-норма)

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

Эти нормы являются частными случаями *нормы Гельдера* (или нормы l_p) с показателем p, $p \geq 1$:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Для евклидовой векторной нормы имеет место *неравенство Коши–Буняковского*:

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2.$$

Две векторные нормы $\|\cdot\|_{\mathrm{I}}$ и $\|\cdot\|_{\mathrm{II}}$ называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные вещественные числа c_1 и c_2, что для любого вектора $\boldsymbol{x}$ выполняются неравенства (*соотношения эквивалентности*)

$$c_1\,\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{I}} \le \|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{II}} \le c_2\,\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{I}}$$

причем c_1 и c_2 не зависят от выбора $\boldsymbol{x}$. Рассмотренные выше нормы эквивалентны.

Собственные значения матриц. Число λ называется *собственным значением* квадратной матрицы A, если существует такой ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$, что

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Любой вектор $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, удовлетворяющий этому уравнению, называется *собственным вектором* матрицы A, соответствующим собственному значению λ. Совокупность всех собственных значений называется *спектром* матрицы, а максимальный из модулей ее собственных значений называется *спектральным радиусом.* Собственные значения λ (в общем случае комплексные) являются нулями *характеристического многочлена* $\det(A-\lambda\,E)$, т.е. нулями (корнями) *векового уравнения* $\det(A-\lambda\,E)=0$. Собственные значения матриц A и A^T совпадают. Если матрица A невырожденная и λ — любое ее собственное значение, то $\lambda \neq 0$ и λ^{-1} является собственным значением матрицы A^{-1}. Если λ — собственное значение матрицы A, то число $\lambda-\mu$ является собственным значением матрицы $A-\mu, E$, где E — единичная матрица. Число λ^2 — собственное значение матрицы A^2.

Ортогональные матрицы. Вещественная $(n\times n)$-матрица Q называется *ортогональной*, если $Q\,Q^T = E$. Матрица Q^T также ортогональная. Кроме того, $\det(Q) = \pm 1$ и $Q^{-1} = Q^T$. Произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица.

Симметричные положительно определенные матрицы. Это такие матрицы A, для которых квадратичная форма $\boldsymbol{x}^T A\,\boldsymbol{x} = (A\,\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}) > 0$ для всех ненулевых векторов $\boldsymbol{x}$. Для этих матриц принято обозначение $A = A^T > 0$. Их диагональные элементы и собственные значения положительны. Если B — прямоугольная матрица с линейно-независимыми столбцами (строками), то матрица $A = B^T\,B$ является симметричной положительно определенной; если у B столбцы (строки) линейно-зависимы, то $A = B^T\,B$ — симметричная положительно полуопределенная матрица.

Сингулярное разложение матриц. Для любой вещественной $(n\times m)$-матрица ранга r существуют ортогональная $(n\times n)$-матрица U и ортогональная $(m\times m)$-матрица V, такие, что

$$U^T\,A\,V = \Sigma,$$

где Σ — прямоугольная диагональная $(n\times m)$-матрица с невозрастающими неотрицательными элементами σ_i $(i = 1,\ldots,m)$ на диагонали. Это разложение матрицы A называется *сингулярным*, а элементы σ_i — *сингулярными числами*, причем

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{r+1} = \ldots \sigma_m = 0.$$

Квадраты ненулевых сингулярных чисел матрицы A совпадают с ненулевыми собственными значениями матриц $A^T A$ и $A A^T$, а количество ненулевых сингулярных чисел равно рангу матрицы A. Сингулярное разложение единственно с точностью до матриц U и V.

Матричные нормы. Пусть вещественной или комплексной $(n \times m)$-матрице A поставлено в соответствие некоторое вещественное число $\|A\|$, такое, что выполнены следующие аксиомы:

$$\begin{aligned}
&\|A\| > 0, \quad \text{если} \quad A \neq 0\,, \quad \|0\| = 0, \\
&\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|, \\
&\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \\
&\|A\,C\| \leq \|A\|\,\|C\| \quad \text{(аксиома мультипликативности)}
\end{aligned}$$

для любого числа α и любых матриц B и C, для которых соответствующие операции имеют смысл. Тогда число $\|A\|$ называется *нормой* матрицы A.

Если $\|A\|$ удовлетворяет только первым трем аксиомам, то такую норму называют аддитивной (обобщенной) матричной нормой. Если удовлетворяются все четыре аксиомы, то такая норма матрицы называется мультипликативной. Всякую аддитивную норму умножением на достаточно большую положительную константу можно превратить в мультипликативную. Везде, где не оговорено противное, под матричной нормой будем понимать мультипликативную матричную норму.

Наиболее употребительными на практике являются следующие матричные нормы:

— первая норма (столбцовая норма, или 1-норма)

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|;$$

— спектральная норма (вторая норма, или норма Гильберта)

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq m} \sigma_i = \left(\max_{1 \leq i \leq m} \lambda_i\big(A^T A\big) \right)^{1/2} = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i\big(A A^T\big) \right)^{1/2},$$

где σ_i — сингулярные числа матрицы A, $\lambda_i\big(A^T A\big)$ — собственные значения матрицы $A^T A$ и $\lambda_i\big(A A^T\big)$ — собственные значения матрицы $A A^T$;

— бесконечная норма (строчная норма, или ∞-норма)

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|;$$

— сферическая норма (норма Фробениуса, или евклидова норма)

$$\|A\|_F = \|A\|_E = N(A) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} =$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\big(A^TA\big)\right)^{1/2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^TA)}.$$

Выписанные матричные нормы *эквивалентны*.

Матричная норма $\|\cdot\|_M$ называется *согласованной* с векторными нормами $\|\cdot\|_V$, если

$$\|A\boldsymbol{x}\|_V \le \|A\|_M\|\boldsymbol{x}\|_V$$

для любой матрицы A и всех векторов $\boldsymbol{x}$. Всякая норма матрицы согласована с какими-нибудь векторными нормами.

Пусть задана векторными норма $\|\cdot\|_V$. Тогда числовая функция

$$\|A\| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_V \ne 0}\frac{\|A\,\boldsymbol{x}\|_V}{\|\boldsymbol{x}\|_V} = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_V = 1}\|A\,\boldsymbol{x}\|_V$$

является матричной нормой и называется нормой матрицы, *подчиненной* векторной норме $\|\cdot\|_V$.

Среди всех матричных норм, согласованных с заданной векторной нормой, подчиненная норма является *минимальной* в том смысле, что в неравенстве $\|A\boldsymbol{x}\|_V \le \|A\|_M\|\boldsymbol{x}\|_V$ число $\|A\|_M$ нельзя уменьшить. Спектральная, 1- и ∞-нормы матриц являются подчиненными по отношению, соответственно, к евклидовой, 1- и ∞-нормам векторов, а значит и согласованными с ними.

Ортогонально подобные матрицы. Матрица A называется ортогонально подобной матрице B, если существует такая ортогональная матрица Q, что $A = Q^TBQ$. Ортогонально подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения.

Задачи и решения

1. Найти соотношения эквивалентности, связывающие векторные нормы $||\boldsymbol{x}||_\infty$, $||\boldsymbol{x}||_1$ и $||\boldsymbol{x}||_2$.

Решение. 1.1. Из неравенств $\max_{1\le i\le n}|x_i| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i| \le n\,\max_{1\le i\le n}|x_i|$ следует

$$||\boldsymbol{x}||_\infty \le ||\boldsymbol{x}||_1 \le n\,||\boldsymbol{x}||_\infty\,.$$

1.2. Из неравенств $n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|x_i| \le \max_{1\le i\le n}|x_i| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ следует

$$n^{-1}\|\boldsymbol{x}\|_1 \le \|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\|_1.$$

1.3. Поскольку $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2$, то $||\boldsymbol{x}||_2 \le ||\boldsymbol{x}||_1$. Из неравенства Коши–Буняковского имеем

$$||\boldsymbol{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = n^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = n^{1/2} ||\boldsymbol{x}||_2 \,.$$

Следовательно,

$$n^{-1/2} ||\boldsymbol{x}||_1 \le ||\boldsymbol{x}||_2 \le ||\boldsymbol{x}||_1 \,.$$

1.4. Из неравенств $\max_{1 \le i \le n} x_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le n \, \max_{1 \le i \le n} x_i^2$ следует

$$||\boldsymbol{x}||_\infty \le ||\boldsymbol{x}||_2 \le n^{1/2} \, ||\boldsymbol{x}||_\infty \,.$$

2. Найти матричную норму, подчиненную евклидовой векторной норме $|| \cdot ||_2$.

Решение. По определению матричной нормы, подчиненной евклидовой векторной норме, имеем

$$||A||_2 = \max_{\boldsymbol{x} \ne 0} \frac{||A\boldsymbol{x}||_2}{||\boldsymbol{x}||_2} = \max_{\boldsymbol{x} \ne 0} \sqrt{\frac{(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}} = \max_{\boldsymbol{x} \ne 0} \sqrt{\frac{(A^T A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}}.$$

Отметим, что матрица $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ — симметричная и

$$(A^T A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) \ge 0;$$

следовательно, все ее собственные значения неотрицательны: $\lambda(A^T A) \ge 0$.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортонормированная система собственных векторов матрицы $A^T A$; следовательно, $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения матрицы $A^T A$.

Любой вектор $\boldsymbol{x}$ представим в виде $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{e}_i$. Поэтому

$$(A^T A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2.$$

и $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$.

Далее имеем

$$\max_{\boldsymbol{x} \ne 0} \sqrt{\frac{(A^T A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}} = \max_{\boldsymbol{x} \ne 0} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}} \le \max_{\boldsymbol{x} \ne 0} \sqrt{\frac{\max_i \lambda_i \sum_{i=1}^{n} c_i^2}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}} = \sqrt{\max_i \lambda_i}.$$

Здесь равенство достигается на собственном векторе, соответствующем максимальному собственному значению матрицы $A^T A$. Следовательно,

$$||A||_2 = \sqrt{\max_i \lambda(A^T A)} \,.$$

Следует отметить важный частный случай симметричной матрицы: $A = A^T$. Тогда

$$||A||_2 = \max_i |\lambda(A)|.$$

Если же эта матрица к тому же положительно определена, т.е. $A = A^T > 0$, то

$$||A||_2 = \max_i \lambda(A).$$

3. Пусть A — вещественная $(n \times m)$-матрица, $\boldsymbol{x}$ — вещественный m-вектор и $\boldsymbol{y}$ — вещественный n-вектор. Доказать следующие три свойства спектральной нормы:

$$||A||_2 = \max_{\substack{||\boldsymbol{x}||_2=1 \\ ||\boldsymbol{y}||_2=1}} \left|\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}\right|, \quad ||A^T||_2 = ||A||_2, \quad ||A^T A||_2 = ||AA^T||_2 = ||A||_2^2.$$

Решение. 3.1. Для доказательства первого свойства спектральной нормы надо показать, что существуют такие векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ единичной длины, на которых максимум достигается. В силу неравенства Коши–Буняковского и учитывая, что спектральная норма согласована с евклидовой векторной нормой, получим неравенство

$$\left|\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}\right| = (\boldsymbol{y}, A\boldsymbol{x}) \le ||\boldsymbol{y}||_2\, ||A\boldsymbol{x}||_2 \le ||\boldsymbol{y}||_2\, ||\boldsymbol{x}||_2\, ||A||_2 = ||A||_2\,.$$

Пусть единичный длины вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что $||A\boldsymbol{x}||_2 = ||A||_2$, т.е. на нем достигается максимум в определении подчиненной нормы, и возьмем $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}/||A\boldsymbol{x}||_2$. Тогда $||\boldsymbol{y}||_2 = 1$ и

$$\left|\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}\right| = \left|\frac{(A\boldsymbol{x})^T}{||A\boldsymbol{x}||_2}\, A\boldsymbol{x}\right| = \left|\frac{\boldsymbol{x}^T A^T A\boldsymbol{x}}{\|A\boldsymbol{x}\|_2}\right| = \frac{(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})}{||A\boldsymbol{x}||_2} = \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2^2}{\|A\boldsymbol{x}\|_2} = ||A\boldsymbol{x}||_2 = ||A||_2\,.$$

Следовательно, искомые векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ построены и первое свойство спектральной нормы доказано.

3.2. Из первого свойства спектральной нормы и из равенства

$$||A^T||_2 = \max_{\substack{||\boldsymbol{x}||_2=1 \\ ||\boldsymbol{y}||_2=1}} \left|\boldsymbol{y}^T A^T\boldsymbol{x}\right| = \max_{\substack{||\boldsymbol{x}||_2=1 \\ ||\boldsymbol{y}||_2=1}} \left(\boldsymbol{y}, A^T\boldsymbol{x}\right) = \max_{\substack{||\boldsymbol{x}||_2=1 \\ ||\boldsymbol{y}||_2=1}} \left(A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\right) =$$
$$= \max_{\substack{||\boldsymbol{y}||_2=1 \\ ||\boldsymbol{x}||_2=1}} \left|\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y}\right| = ||A||_2$$

следует ее второе свойство. Заметим, что поскольку здесь мы применяем первое свойство к матрице A^T, то в обозначениях, принятых в этом равенстве, вектор $\boldsymbol{y}$ имеет размерность m, а вектор $\boldsymbol{x}$ — размерность n.

3.3. Покажем теперь справедливость третьего свойства спектральной нормы. Из второго свойства следует неравенство

$$||A^T A||_2 \le ||A^T||_2 ||A||_2 = ||A||_2^2.$$

Возьмем такой вектор $\boldsymbol{x}$, что $||\boldsymbol{x}||_2 = 1$ и $||A\,\boldsymbol{x}||_2 = ||A||_2$, и применим первое свойство к матрице $A^T A$, положив $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Тогда получим неравенство

$$||A^T A||_2 \ge \left|\boldsymbol{x}^T A^T A\boldsymbol{x}\right| = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = ||A\,\boldsymbol{x}||_2^2 = ||A||_2^2.$$

Из этих двух неравенств следует $||A^T A||_2 = ||A||_2^2$. Аналогично показывается, что $||AA^T||_2 = ||A||_2^2$. Таким образом, третье свойство спектральной нормы доказано.

4. Пусть A — вещественная прямоугольная матрица. Показать, что умножение ее справа или слева на ортогональную матрицу Q соответствующих порядков не меняет ее спектральную норму.

Решение. Из третьего свойства спектральной нормы следует

$$||QA||_2^2 = ||\big(QA\big)^T QA||_2 = ||A^T Q^T QA||_2 = ||A^T A||_2 = ||A||_2^2.$$

Из второго свойства спектральной нормы и полученного равенства следует

$$||AQ||_2 = ||\big(AQ\big)^T||_2 = ||Q^T A^T||_2 = ||A^T||_2 = ||A||_2.$$

В частности, из

$$||Q\boldsymbol{x}||_2^2 = (Q\boldsymbol{x}, Q\boldsymbol{x}) = (Q\boldsymbol{x})^T Q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T Q^T Q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = ||\boldsymbol{x}||_2^2$$

следует, что умножение вектора $\boldsymbol{x}$ на ортогональную матрицу сохраняет его длину.

5. Показать справедливость неравенства

$$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty.$$

Решение. Для согласованных векторных и матричных норм из

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

имеем

$$|\lambda| \, \|\boldsymbol{x}\| \leq \|A\| \, \|\boldsymbol{x}\|, \quad |\lambda| \leq \|A\|,$$

т.е. модуль любого собственного значения матрицы не больше любой ее нормы. Следовательно,

$$\|A\|_2^2 = \max \lambda(A^T A) \leq \|A^T A\|_1 \leq \|A\|_1 \|A^T\|_1 = \|A\|_1 \|A\|_\infty.$$

Здесь использовано очевидное равенство $\|A^T\|_1 = \|A\|_\infty$.

6. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Найти соотношение эквивалентности, связывающее норму $M(A) = n \max\limits_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|$ с ∞-нормой матрицы.

Решение. Поскольку

$$\|A\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \max_{i,j} |a_{ij}| \sum_j |x_j| = \max_{i,j} |a_{ij}| \|\boldsymbol{x}\|_1,$$

то

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \geq \frac{\|A_x\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_1}$$

и равенство достигается, когда все элементы матрицы A одинаковы.

Таким образом, имеем

$$\max_{i,j} |a_{ij}| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A_x\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_1}.$$

Получим оценку снизу:

$$M(A) = n \max_{i,j} |a_{ij}| = n \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \geq \sup_{x \neq 0} \frac{n\|A\boldsymbol{x}\|_\infty}{n\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \geq \|A\|_\infty,$$

т.е. $\|A\|_\infty \leq M(A)$. Здесь мы использовали неравенство

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq n\|\boldsymbol{x}\|_\infty.$$

Из этого неравенства следует оценка сверху:

$$M(A) = n \max_{i,j} |a_{ij}| = n \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \leq n \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \leq n\|A\|_\infty,$$

т.е. $M(A) \leq n\|A\|_\infty$.

Таким образом, мы получили следующее соотношение эквивалентности:

$$\|A\|_\infty \leq M(A) \leq n\|A\|_\infty.$$

7. Показать, что ∞ -норма вектора $\boldsymbol{x}$ является частным случаем нормы Гельдера с показателем $p = \infty$.

Решение. Действительно,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_\infty &= \lim_{p\to\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \\
&= \lim_{p\to\infty} \left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|^p \sum_{i=1}^n \frac{|\boldsymbol{x}_i|^p}{\max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|^p} \right)^{1/p} = \\
&= \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \left(\lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{\max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|^p} \right)^{1/p} = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|,
\end{aligned}$$

поскольку под знаком предела стоит конечная сумма величин, не превосходящих 1, и, следовательно, этот предел равен 1.

Соотношение эквивалентности ∞ -нормы и нормы Гельдера следует из следующих неравенств:

$$\max_i |x_i|^p \leq \sum_i |x_i|^p \leq \sum \max_i |x_i|^p = n \max |x_i|^p,$$

$$\max_i |x_i| \leq \left(\sum |x_i|^p \right)^{1/p} \leq n^{1/p} \max |x_i|.$$

Таким образом, искомое соотношение эквивалентности имеет вид

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \leq n^{1/p} \|\boldsymbol{x}\|_\infty.$$

8. Показать, что норма Гельдера удовлетворяет аксиоме треугольника из определения векторной нормы: $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p$ (это неравенство называют неравенством треугольника или неравенством Минковского).

Решение. 8.1. Сначала докажем вспомогательное неравенство. Пусть p и q образуют гельдеровскую пару, т.е.

$$p, q \geq 1, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Тогда для любых $a, b \geq 0$ выполнено неравенство

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\,.$$

Поскольку логарифмическая функция выпукла, то для всех $u, v > 0$ имеет место неравенство

$$\alpha \log u + \beta \log v \leq \log(\alpha u + \beta v) \qquad \forall \alpha, \beta \geq 0, \qquad \alpha+\beta=1.$$

Так как p и q образуют гельдеровскую пару, то из

$$\log\Bigl(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\Bigr) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^p = \log a + \log b = \log(ab)$$

следует доказываемое неравенство.

8.2. Теперь докажем неравенство Гельдера: для любой гельдеровской пары p, q и любых n-векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q.$$

Будем считать, что $\boldsymbol{x} \neq 0$ и $\boldsymbol{y} \neq 0$ (для нулевых векторов неравенство очевидно) и положим

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_p}\,, \qquad \tilde{\boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_q}\,,$$

Согласно доказанному выше неравенству имеем

$$|\tilde{x}_i||\tilde{y}_i| \leq \frac{|\tilde{x}_i|^p}{p}+\frac{|\tilde{y}_i|^q}{q}\,, \qquad i=1,\dots,n.$$

Складываем эти неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_i||\tilde{y}_i| \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\tilde{x}_i|^p}{p} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\tilde{y}_i|^q}{q} = \frac{\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_p^p}{p} + \frac{\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|_q^q}{q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

Из

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{y}_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_i||\tilde{y}_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|\boldsymbol{x}\|_p}\frac{y_i}{\|\boldsymbol{y}\|_q} \leq 1$$

следует неравенство Гельдера

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \le \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q.$$

8.3. Наконец, перейдем к решению задачи. Выберем такое число q, что p и q образуют гельдеровскую пару. Тогда в силу неравенства Гельдера и учитывая, что $(p-1)q = p$, получим

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i||x_i+y_i|^{p-1} \le \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i+y_i|^{p-1} \le \\
&\le \|\boldsymbol{x}\|_p \|(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{p-1}\|_q + \|\boldsymbol{y}\|_p \|(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{p-1}\|_q = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} ((x_i+y_i)^{p-1})^q\right)^{1/q} (\|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^p\right)^{1/q} (\|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p) = \\
&= \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1} (\|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p).
\end{aligned}$$

Сокращаем обе части неравенства на $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}$ и получаем решение задачи.

9. Показать, что для евклидовой векторной нормы имеет место тождество параллеограмма $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|_2 + 2\|\boldsymbol{y}\|_2$.

Решение. Тождество параллеограмма доказывается раскрытием квадратов норм левой части через скалярные произведения:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \\
(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получаем решение задачи.

10. Показать, что подчиненная норма является согласованной.

Решение. Действительно, из определения подчиненной нормы следует, что

$$\frac{\|A\boldsymbol{x}\|_V}{\|\boldsymbol{x}\|_V} \le \|A\|_M \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{x} \ne 0.$$

Отсюда получаем решение задачи: $\|A\boldsymbol{x}\|_V \le \|A\|_M \|\boldsymbol{x}\|_V$. Заметим, что если $\|\boldsymbol{x}\|_V = 1$, то $\|A\boldsymbol{x}\|_V \le \|A\|_M$.

11. Показать, что числовая функция из определения подчиненной нормы действительно является матричной нормой.

Решение. Для этого надо показать, что удовлетворяются все аксиомы матричной нормы. Здесь и ниже будем опускать индексы M и V у матричных и векторных норм.

Первые две аксиомы легко следуют из аксиом векторной нормы. Покажем, что удовлетворяется третья аксиома. Действительно, в силу неравенства треугольника для векторной нормы имеем

$$\|A+B\| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|(A+B)\boldsymbol{x}\| \le \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\| + \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|B\boldsymbol{x}\| = \|A\| + \|B\|.$$

Поскольку подчиненная норма является согласованной, то верно неравенство

$$\|AB\| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|AB\boldsymbol{x}\| \le \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} (\|A\|, \|B\boldsymbol{x}\|) = \|A\| \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|B\boldsymbol{x}\| = \|A\|\|B\|,$$

из которого следует, что удовлетворяется и четвертая аксиома.

12. Показать, что норма диагональной матрицы D порядка n, подчиненная евклидовой векторной норме и обозначаемая $\|D\|_2$, равна максимальному из модулей диагональных элементов.

Решение. По определению подчиненной матричной нормы имеем (здесь вместо sup будем использовать max):

$$\|D\|_2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1} \|D\boldsymbol{x}\|_2.$$

Напомним, что такую норму называют спектральной. Рассмотрим

$$\|D\|_2^2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1} \|D\boldsymbol{x}\|_2^2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1} (D\boldsymbol{x}, D\boldsymbol{x}).$$

Собственными векторами диагональной матрицы D являются единичные векторы $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, у которых i-я компонента равна 1, а остальные равны нулю: $D\boldsymbol{e}_i = d_i\boldsymbol{e}_i$, где d_i — диагональные элементы. Разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по этой системе векторов:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i.$$

Тогда

$$D\boldsymbol{x} = D\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i \boldsymbol{e}_i \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2.$$

Следовательно,

$$\|D\|_2^2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1} (D\boldsymbol{x}, D\boldsymbol{x}) = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 d_i^2 = \max_{1\le i\le n} d_i^2 \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left(d_i^2 / \max_{1\le i\le n} |d_i|\right)^2.$$

Построим такой вектор $\boldsymbol{x}$, у которого $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$ и для которого достигается максимум в правой части последнего неравенства. Так как $0 < \left(d_i^2 / \max\limits_{1\le i\le n} |d_i|\right)^2 \le 1$, то получим $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left(d_i^2 / \max\limits_{1\le i\le n} |d_i|\right)^2 \le 1$. Следовательно, этот максимум достигается для вектора $\boldsymbol{x}$, у которого компонента с номером, совпадающим с индексом максимального по модулю диагонального элемента, равна 1, а остальные компоненты равны нулю. Значит $\|D\|_2^2 = \max\limits_{1\le i\le n} d_i^2$ и

$$\|D\|_2 = \max_{1\le i\le n} |d_i|,$$

откуда и получаем решение задачи.

13. Пусть A — вещественная $(n \times m)$-матрица ранга r. Определить, чему равна ее спектральная норма.

Решение. Рассмотрим сингулярное разложение матрицы: $A : U^T AV = \Sigma$. Тогда

$$\begin{aligned}\Sigma^T\Sigma^T &= \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0) = (U^TAV)^T(U^TAV) = \\ &= V^TA^TUU^TAV = V^TA^TAV.\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что матрицы $\Sigma^T\Sigma$ и A^TA ортогонально подобны. Следовательно, их собственные значения совпадают, т.е. $\sigma_1^2 = \lambda_i^{(A^TA)}$ $(i = 1, \dots, m)$. Поскольку умножение матрицы слева и справа на ортогональные матрицы не меняют ее спектральную норму, то с учетом третьего свойства спектральной нормы имеем

$$\|\Sigma^T\Sigma\|_2 = \|V^TA^TAV\|_2 = \|A^TA\|_2 = \|A\|_2^2.$$

Спектральная норма диагональной матрицы равна максимальному из модулей диагональных элементов. Следовательно,

$$\|A\|_2^2 = \|\Sigma^T\Sigma\|_2 = \max_{1\le i\le m} \sigma_i^2 = \max_{1\le i\le m} \lambda_i^{(A^TA)}.$$

Так как σ_i и $\lambda_i^{(A^TA)}$ неотрицательны, то

$$\|A\|_2 = \max_{1\le i\le m} \sigma_i = \sigma_1 = \left(\max_{1\le i\le m} \lambda_i^{(A^TA)}\right)^{1/2}.$$

Напомним, что количество ненулевых сингулярных чисел матрицы A совпадает с ее рангом r, максимальным сингулярным числом является σ_i, а минимальным — σ_r. Аналогично показывается, что

$$\|A\|_2 = \sigma_1 = \left(\max_{1\le i\le n} \lambda_i^{(AA^T)}\right)^{1/2}.$$

Если A — симметричная матрица порядка n, то

$$\|A\|_2 = \sigma_1 = \left(\max_{1\le i\le n} \lambda_i^{(A^2)}\right)^{1/2} = \max_{1\le i\le n} \left|\lambda_i^{(A)}\right|.$$

Если матрица еще и положительно определенная, то $\|A\|_2 = \sigma_1 = \max\limits_{1\le i\le n} \lambda_i^{(A)}$. Если A — невыроженная матрица порядка n, то

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_2 &= \|(U\Sigma V^T)^{-1}\|_2 = \|(V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1}\|_2 = \|V\Sigma^{-1}U^T\|_2 = \|\Sigma^{-1}\|_2 = \\ &= \max_{1\le i\le m} \sigma_i^{-1} = \sigma_n^{-1}.\end{aligned}$$

Отсюда также следует, что $\|A^{-1}\|_2 = \min\limits_{1\le i\le n} \lambda_i^{(A^TA)} = \min\limits_{1\le i\le n} \lambda_i^{(AA^T)}$.

14. Пусть A — вещественная $(n \times m)$-матрица. Показать, что для матричной нормы $\|A\|_1$, подчиненной первой векторной норме, выполнено равенство

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Решение. Рассмотрим матрицу A как совокупность столбцов:

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \, \ldots \, , \boldsymbol{a}_m).$$

Тогда для ненулевого m-вектора $\boldsymbol{x}$ из определения первой векторной нормы получим

$$\begin{aligned} \|A\boldsymbol{x}\|_1 &= \|x_1\boldsymbol{a}_1 + \, \ldots \, + x_m\boldsymbol{a}_m\|_1 \le |x_1|\|\boldsymbol{a}_1\|_1 + \, \ldots \, + |x_m|\|\boldsymbol{a}_m\|_1 \le \\ &\le \max_{1\le j\le m} \|\boldsymbol{a}_j\|_1(|x_1| + \, \ldots \, + |x_m|) = \|\boldsymbol{x}\|_1 \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|. \end{aligned}$$

Из определения подчиненной матричной нормы и этого неравенства имеем

$$\|A\|_1 = \sup_{x\ne 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} \le \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|. \qquad (*)$$

Пусть максимум в правой части достигается при $j = k$, т.е. $\|\boldsymbol{a}_k\|_1 = \max\limits_{1\le j\le m} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, и пусть $\boldsymbol{e}_k$ — m-вектор, у которого k-я компонента равна 1, а остальные равны нулю. Тогда

$$\|A\boldsymbol{e}_k\|_1 = \|\boldsymbol{a}_k\|_1 = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Поскольку подчиненная норма согласована со своей векторной нормой, то

$$\max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\boldsymbol{e}_k\|_1 \le \|A\|_1\|\boldsymbol{e}_k\|_1 = \|A\|_1.$$

Из этого неравенства и неравенства $(*)$ следует решение задачи.

15. Пусть A — вещественная $(n \times m)$-матрица. Показать, что для ∞-нормы $\|A\|_\infty$, подчиненной ∞-норме вектора, выполнено равенство

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Решение. Возьмем ненулевой m-вектор $\boldsymbol{x}$. Заметим, что для i-й компоненты вектора $A\boldsymbol{x}$ выполнено равенство $(A\boldsymbol{x})_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$. Из определения ∞-нормы вектора получим

$$\begin{aligned}\|A\boldsymbol{x}\|_\infty &= \max_{1\le i\le n}|(A\boldsymbol{x})_i| = \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right| \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}x_j| \le \\ &\le \max_{1\le j\le m}|x_j|\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|.\end{aligned}$$

Из определения подчиненной матричной нормы и этого неравенства имеем

$$\|A\|_\infty = \sup_{x\ne 0}\frac{\|A\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|. \qquad (*)$$

Пусть максимум в правой части достигается при $j = k$, т.е. $\sum\limits_{j=1}^{m}|a_{kj}| = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{m}|a_{ij}|$. Положим вектор $\boldsymbol{x} = (\mathrm{sign}(a_{k1}), \ldots, \mathrm{sign}(a_{km}))$. Для этого вектора k-я компонента вектора $A\boldsymbol{x}$ имеет вид

$$(A\boldsymbol{x})_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj}x_j = \sum_{j=1}^{m}|a_{kj}|.$$

Для любой другой компоненты i вектора $A\boldsymbol{x}$ выполнено

$$(A\boldsymbol{x})_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \le \sum_{j=1}^{m}|a_{ij}||x_j| \le \sum_{j=1}^{m}|a_{ij}| \le \sum_{j=1}^{m}|a_{kj}|.$$

Следовательно, k-я компонента вектора $A\boldsymbol{x}$ является максимальной. Поэтому в силу определения ∞-нормы вектора имеем

$$\|A\boldsymbol{x}\|_\infty = \sum_{j=1}^{m}|a_{kj}| = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|.$$

Поскольку подчиненная норма согласована со своей векторной нормой, то

$$\max_{1\le i\le n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| = \|A\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|A\|_\infty\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \|A\|_\infty.$$

Из этого неравенства и неравенства $(*)$ следует решение задачи.

16. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка n. Показать, что функция $\nu(A) = \max\limits_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|$ не является матричной нормой, тогда как функция $\mu(A) = \sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|$ является матричной нормой.

Решение. Вначале отметим, что норма матрицы называется *аддитивной* (или обобщенной) матричной нормой, если она удовлетворяет первым трем аксиомам матричной нормы, и *мультипликативной*, если она удовлетворяет всем четырем аксиомам. Всякую аддитивную норму можно превратить в мультипликативную умножением на достаточно большую положительную константу. Поэтому обычно под нормой матрицы понимается мультипликативная норма.

Функция $\nu(A)$ является естественным обобщением ∞-нормы (nn)-векторов. Как легко проверить, она удовлетворяет первым трем аксиомам матричной нормы, т.е. является аддитивной матричной нормой, но не удовлетворяет четвертой аксиоме (т.е. аксиоме мультипликативности). В последнем можно убедиться на примере

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

в котором $\nu(A) = \nu(B) = 1$, тогда как $\nu(AB) = 2$.

Однако если мы умножим $\nu(A)$ на n, то полученная функция $M(A) = n\nu(A)$ уже будет удовлетворять всем аксиомам, в том числе и четвертой. Действительно, пусть a и b — максимальные по модулю элементы $(n \times n)$-матриц A и B. Тогда

$$\begin{aligned} \|AB\|_M &= M(AB) = n \max_{1\le i,j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}b_{kj}| \le n \max_{1\le i,j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \le \\ &\le n \sum_{k=1}^{n} |a||b| = n|a||b| \sum_{k=1}^{n} 1 = na \cdot nb = M(A)M(B) = \|A\|_M \|B\|_M. \end{aligned}$$

Функция $\mu(A)$ удовлетворяет всем аксиомам матричной нормы. Покажем это для четвертой аксиомы:

$$\|AB\|_\mu = \mu(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right| \le \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| = \mu(A)\mu(B) = \|A_\mu\| \|B\|_\mu.$$

Заметим, что $\mu(A)$ является естественным обобщением 1-нормы (nn)-вектора.

17. Пусть A — вещественная $(n \times n)$-матрица и $\boldsymbol{x}$ — вещественный n-вектор. Показать, что сферическая норма матрицы согласована с евклидовой векторной нормой и удовлетворяет четвертой аксиоме матричной нормы, но не подчинена ни одной из векторных норм.

Решение. Обозначим i-ю строку матрицы A через $\boldsymbol{a}_i$. По определению евклидовой векторной нормы имеем

$$\|A\boldsymbol{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x}|^2.$$

Получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|A\boldsymbol{x}\|_2^2 &= \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} x_j \Big)^2 \le \sum_i \Big(\sum_j a_{ij}^2 \sum_j x_j^2 \Big) = \sum_j x_j^2 \sum_i \sum_j a_{ij}^2 = \\ &= \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \sum_i \|\boldsymbol{a}_i\|_2^2. \end{aligned} \qquad (*)$$

По определению сферической нормы имеем

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_{ij}^2 + \ldots + a_{in}^2) = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_i\|_2^2.$$

Тогда из неравенства $(*)$ следует $\|A\boldsymbol{x}\|_2 \le \|A\|_F\|\boldsymbol{x}\|_2$, а это означает, что сферическая норма согласована с евклидовой векторной нормой.

Покажем теперь, что для сферической нормы выполнена аксиома мультипликативности. Пусть A и B — вещественные матрицы порядка n. Тогда

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|^2 \le \sum_{i,j}\left(\sum_{k}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{m}|b_{m,j}|^2\right) = \\ &= \left(\sum_{i,k}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{m,j}|b_{mj}|^2\right) = \|A\|_F^2\|B\|_F^2.\end{aligned}$$

Следовательно, четвертая аксиома матричной нормы удовлетворяется.

Заметим, что сферическая норма матрицы является естественным обобщением евклидовой нормы (nn)-вектора.

Поскольку сферическая норма единичной матрицы порядка n равна $n^{1/2}$, а не 1, то это означает, что сферическая норма не подчинена ни одной из векторных норм, так как для всякой подчиненной нормы матрицы выполняется $\|E\| = 1$.

18. Пусть A — вещественная матрица порядка n. Показать, что умножение матрицы A слева или справа на ортогональную матрицу Q порядка n не меняет ее сферическую норму.

Решение. Рассмотрим матрицу A как совокупность векторов-столбцов:

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$$

Тогда

$$\|QA\|_F^2 = \|(Q\boldsymbol{a}_1, \ldots, Q\boldsymbol{a}_n)\|_F^2 = \|(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{c}_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{a}_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \|A\|_F^2,$$

где $\boldsymbol{c}_i = Q\boldsymbol{a}_i$ и $\|\boldsymbol{c}_i\|_2 = \|Q\boldsymbol{a}_i\|_2 = \|\boldsymbol{a}_i\|_2$, поскольку умножение ортогональной матрицы на вектор не меняет евклидову длину этого вектора.

Теперь покажем, что сферическая норма матрицы не меняется и в результате умножения ее на ортогональную матрицу Q справа:

$$\|AQ\|_F = \|(AQ)^T\|_F = \|Q^TA^T\|_F = \|A^T\|_F = \|A\|_F.$$

Здесь использовано очевидное равенство $\|A^T\|_F = \|A\|_F$.

Заметим, что для ортогональной матрицы Q порядка n выполнено равенство

$$\|E\|_F^2 = \|QE\|_F^2 = \|Q\|_F^2 = n.$$

Это означает, что сферическая норма не подчинена ни одной из векторных норм, так как для всякой подчиненной нормы матрицы выпоняется $\|E\| = 1$.

19. Пусть A — вещественная $(n \times n)$-матрица ранга r. Показать, что для сферической нормы матрицы A выполнено равенство $\|A\|_F^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} \sigma_i^2$, где σ_i — ненулевые сингулярные числа матрицы A.

Решение. Рассмотрим сингулярное разложения $\Sigma = U^T AV$ матрицы A, где U и V — ортогональные матрицы порядка n, а Σ — диагональная матрица порядка n с невозрастающими неотрицательными элементами σ_i на диагонали:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{r+1} = \ldots \sigma_n = 0.$$

Напомним, что квадраты ненулевых сингулярных чисел матрицы A совпадают с ненулевыми собственными значениями матриц $A^T A$ и AA^T, а количество ненулевых сингулярных чисел равно рангу r матрицы A. Учитывая, что сферическая норма матрицы A не меняется от умножения ее слева и справа на ортогональные матрицы, из сингулярного разложения $\Sigma = U^T AV$ матрицы A получим решение задачи:

$$\|\Sigma\|_F^2 = \|\mathrm{diag}(\sigma_1^2, \, \ldots \, ,\sigma_r^2, 0, \, \ldots \, , 0)\|_F^2 = \sigma_1^2 + \, \ldots \, + \sigma_r^2 = \|U^T AV\|_F^2 = \|A\|_F^2.$$

Из этого равенства следует другое полезное представление сферической нормы:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(A^T A) = \mathrm{tr}\,(A^T A),$$

поскольку матрицы $\Sigma^T \Sigma$ и $A^T A$ ортогонально подобны и, следовательно, их собственные значения совпадают:

$$\Sigma^2 = \Sigma^T \Sigma = (U^T AV)^T (U^T AV) = V^T A^T U^T AV = V^T A^T AV.$$

20. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка n. Получить соотношения эквивалентности для сферической и спектральной норм матрицы A.

Решение. Заметим, что

$$\|A\|_2^2 = \sigma_1^2 \leq \sigma_1^2 + \, \ldots \, + \sigma_r^2 = \|A\|_F^2.$$

Иными словами, имеем неравенство $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$, в котором равенство этих норм достигается только тогда, когда матрица A имеет единичный ранг.

Заметим также, что

$$\|A\|_F^2 = \sigma_1^2 + \, \ldots \, + \sigma_r^2 \leq r\sigma_1^2 \leq n\sigma_1^2 = n\|A\|_2^2.$$

Из выписанных выше двух неравенств следуют искомые соотношения эквивалентности:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F$$

Литература

1. *Арушанян И.О., Чижонков Е.В.* Материалы семинарских занятий по курсу “Методы вычислений” / под ред. Арушаняна О.Б. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 1999.

2. *Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В.* Численные методы решения задач и упражнения. М.: Дрофа, 2009.

3. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.

4. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.

5. Библиотека НИВЦ МГУ решения типовых задач численного анализа (http://num-anal.srcc.msu.ru/).

6. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз, 1963.

7. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.

8. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998.

9. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. М.: Наука, 1977.